

BADANIE STATYSTYK ZLICZEŃ FOTONÓW – III PRACOWNIA Z OPTYKI

W ramach ćwiczenia wyznaczyłem statystyki zliczeń fotonów światła laserowego i termicznego oraz wykazałem, że statystyki te pozostają niezmiennione po przejściu światła przez płytkę światłodzielącą. Zbadałem też zależność liczby stopni swobody światła termicznego od czasu zliczania fotonów i na tej podstawie wyznaczyłem jego czas koherencji.

Wstęp

Statystyka zliczeń fotonów światła wytwarzanego przez jednomodowy laser opisana jest rozkładem Poissona [1]:

$$P(N) = \frac{(\bar{N})^N}{N!} e^{-\bar{N}} \quad (1)$$

gdzie: $P(N)$ – prawdopodobieństwo zliczenia N fotonów; \bar{N} – średnia liczba zliczonych fotonów.

Statystyka zliczeń fotonów światła termicznego opisana jest (w pewnym przybliżeniu, por. [1], rozdz. 6) tzw. rozkładem ujemnym dwumianowym:

$$P(N) = \frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} \quad (2)$$

gdzie: $\Gamma(x)$ – funkcja gamma Eulera; M – parametr rozkładu, tzw. liczba stopni swobody.

Liczba stopni M swobody w granicy długich czasów zliczania jest równa stosunkowi czasu zliczania do czasu koherencji światła termicznego. W przypadku światła niespójnego przestrzennie M jest dodatkowo pomnożone przez ilość przestrzennych stopni swobody (por. [1], rozdz. 9). W przypadku czasów zliczania krótszych od czasu koherencji (i pełnej spójności przestrzennej) M dąży do jedności, a rozkład ujemny dwumianowy redukuje się do rozkładu Bosego-Einsteina (p. załącznik):

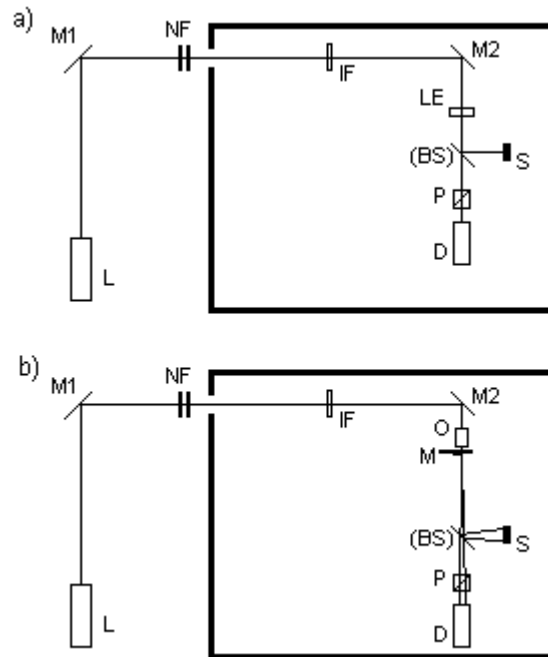
$$P(N) = \frac{1}{1 + \bar{N}} \left(\frac{\bar{N}}{1 + \bar{N}} \right)^N \quad (3)$$

Rozważmy teraz, jak zmieni się statystyka zliczeń fotonów po przejściu światła przez płytkę światłodzielącą o współczynniku transmisji T . Zgodnie z obliczeniami przedstawionymi w załączniku, statystyka światła laserowego pozostanie poissonowska, a statystyka światła termicznego nadal będzie statystyką opisaną rozkładem ujemnym dwumianowym o niezminionej liczbie stopni swobody M (wynika z tego, że również statystyka Bosego-Einsteina pozostanie statystyką Bosego-Einsteina). Zmieni się jedynie średnia liczba zliczeń: z \bar{N} na $T\bar{N}$.

Układ doświadczalny

Układ eksperymentalny do pomiarów ze światłem laserowym przedstawiony jest na rys. 1a. Źródłem światła był laser He-Ne, emitujący światło o długości fali 632,8 nm. Laser nie był jednomodowy, ale ponieważ czasy zliczania były dłuższe niż charakterystyczne czasy dudnień spowodowanych przez interferencję różnych modów, uzyskiwane statystyki były poissonowskie. Wiązka laserowa była odbijana od zwierciadła płaskiego M1 i przepuszczana przez serię filtrów szarych (NF), zmniejszających natężenie wiązki do poziomu nieszkodliwego dla detektora ($< 10^6$ fotonów/s). Dalsza część układu była umieszczona w możliwie szczelnej

osłonie z czarnego PCW. Wiązka przechodziła dalej przez filtr interferencyjny IF ($\lambda = 631$ nm, $\Delta\lambda = 9$ nm), była odbijana od zwierciadła M2 i ogniskowana przez soczewkę skupiającą LE o ogniskowej 15 cm. Następnie na drodze wiązki znajdowała się (usuwalna) płytką światłodzieląca (BS). Część wiązki odbita od płytki była pochłaniana przez pochłaniacz wiązki (S); druga część przez polaryzator P kierowana była do detektora D, umieszczonego w ognisku soczewki LE. Detektorem był licznik pojedynczych fotonów (SPCM AQ 131, EG&G Canada). Charakterystyka detektora: ciemne zliczenia max. 250 fotonów/s, czas martwy max. 50 ns. Detektor był chłodzony wodą. Sygnały z detektora poprzez wzmacniacz i wydłużacz impulsów kierowane były do licznika karty National Instruments PCI 6040 E. Długość czasu zliczania była regulowana przy pomocy wewnętrznego zegara karty; minimalny dostępny czas zliczania wynosił 1 μ s.



Rys. 1 Schemat układu doświadczalnego do pomiarów dla: a) światła laserowego; b) światła termicznego. L – laser; M1, M2 – zwierciadła płaskie; NF – filtry szare; IF – filtr interferencyjny; LE – soczewka; O – obiektyw; M – obracająca się matówka; BS – płytką światłodzieląca; S – pochłaniacz wiązki; P – polaryzator; D – detektor.

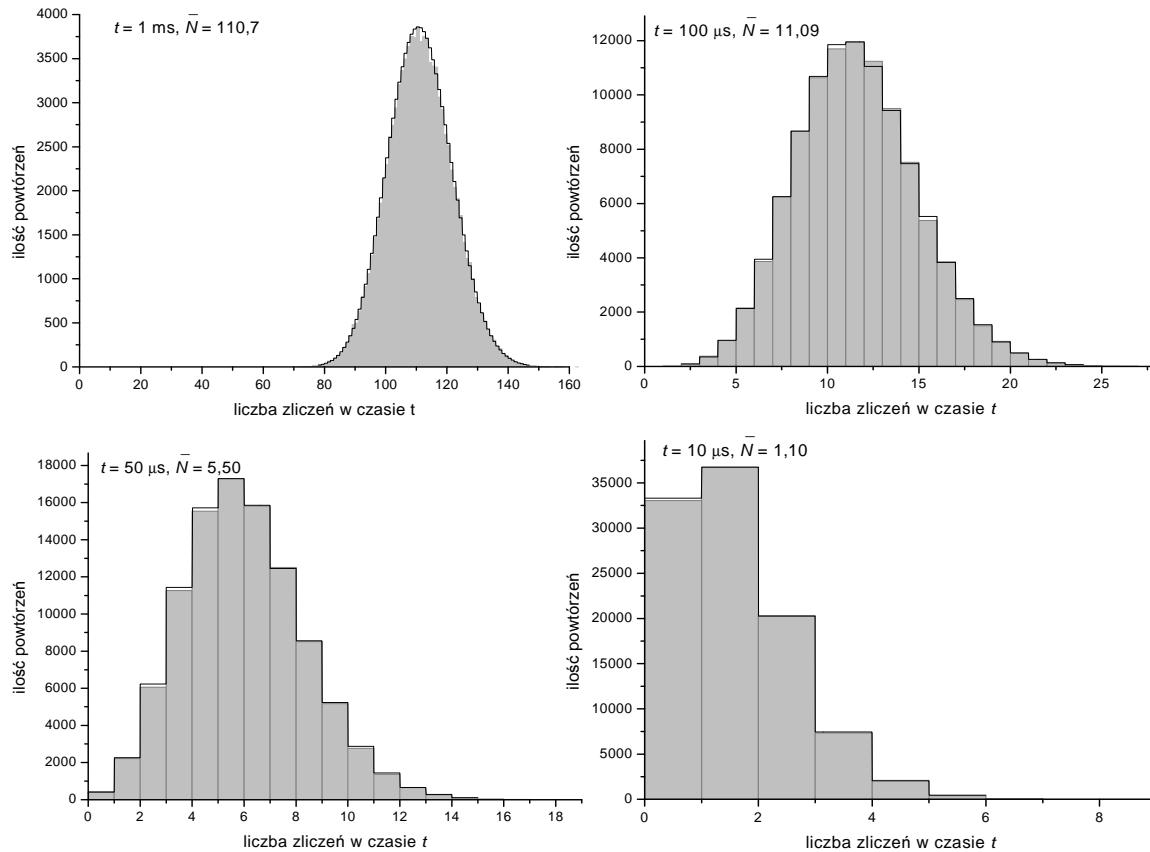
Do pomiarów statystyk światła termicznego konieczna była niewielka modyfikacja układu, przedstawiona na rys. 1b. Ponieważ naturalne światło termiczne ma bardzo krótki czas koherencji (poniżej pikosekund) dysponując minimalnym czasem zliczania 1 μ s rejestrowałbym rozkład ujemny dwumianowy o liczbie stopni swobody M rzędu 10^6 lub więcej – dla tak dużych wartości M rozkład ujemny dwumianowy staje się w praktyce rozkładem Gaussa. Aby uzyskać rozkład możliwie bliski rozkładowi Bosego-Einsteina potrzebne było światło termiczne o czasie koherencji dłuższym niż 1 μ s. Światło takie otrzymuje się ogniskując wiązkę lasera na poruszającej się powoli matówce ([1], par. 4.4.3). W miejscu soczewki umieszczony został obiektyw mikroskopu O (powiększenie 12 razy) – w celu lepszego zogniskowania wiązki. Za obiektywem, w ognisku, znajdowała się okrągła matówka M, obracana powoli przez silnik elektryczny. Pozostałe elementy układu pozostały niezmienione, jedynie detektor został maksymalnie odsunięty od matówki, by zbierać światło możliwie spójne przestrzennie. Detektor został również przesunięty nieco w bok w stosunku do wiązki laserowej.

Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów należało upewnić się, czy średnica wiązki w ognisku soczewki jest mniejsza niż średnica powierzchni detektora (dla pomiarów ze światłem laserowym). W tym celu w ognisku soczewki przeprowadziłem pomiar średnicy wiązki przy pomocy ostrza brzytwy. Otrzymałem wynik ok. 100 μ m. Średnica powierzchni światłoczułej detektora wynosi 170 μ m, a więc wiązka była dostatecznie dobrze zogniskowana.

Wyniki pomiarów i wnioski

Jako pierwsze wyznaczyłem statystyki dla światła laserowego dla różnych czasów zliczania t oraz różnych średnich liczb zliczeń \bar{N} . Podczas tej części eksperymentu płytką

światłodzieląca była usunięta z drogi wiązki. Wyniki w postaci histogramów wraz z dopasowanymi rozkładami Poissona przedstawione są na rys. 2. Czasy zliczania były na tyle krótkie, że zliczenia ciemne (na poziomie 250 Hz) były do pominięcia. Za każdym razem wykonane zostało 100 000 powtórzeń.



Rys. 2 Histogramy liczby zliczeń fotonów światła laserowego dla czasów zliczania w zakresie 10 μs – 1 ms.

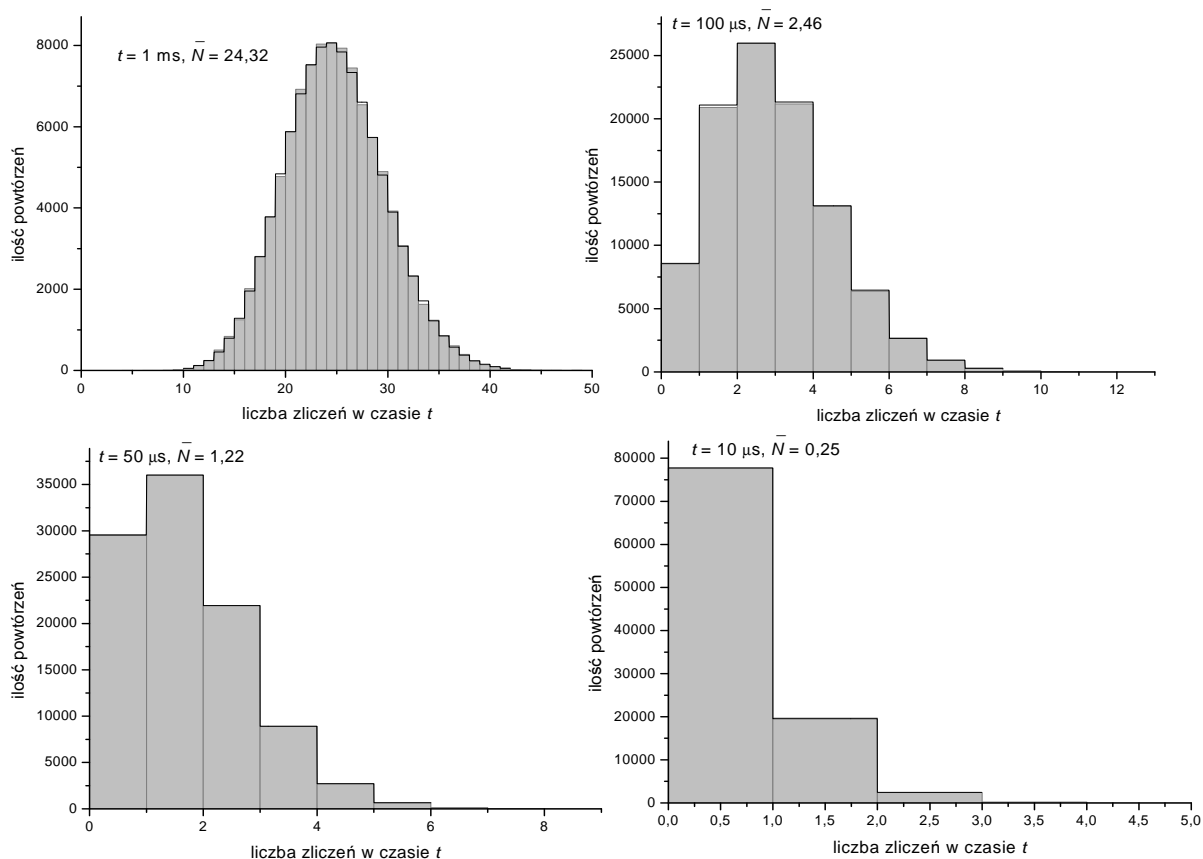
Dopasowania rozkładu Poissona do danych doświadczalnych jest bardzo dobre: dla każdego z 4 czasów zliczania współczynnik korelacji R^2 był większy niż 0,999. Niewielkie rozbieżności mogą być spowodowane: a) dryfem natężenia lasera w czasie; b) faktem, że laser nie jest jednomodowy; c) skończoną ilością powtórzeń.

Następnie pomiędzy soczewką a detektorem umieściłem płytkę światłodzielącą i zmierzyłem odpowiednie statystyki (z tymi samymi czasami zliczania i taką samą liczbą powtórzeń), przedstawione na rys. 3. Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi otrzymujemy również rozkład Poissona. Dopasowanie rozkładu Poissona do danych doświadczalnych jest bardzo dobre: za każdym razem współczynnik $R^2 > 0,9999$.

W tabeli 1 zamieszczone są średnie liczby zliczeń z pomiarów bez oraz z płytką światłodzielącą (odpowiednio N_1 oraz N_2), a także obliczona na tej podstawie wartość współczynnika transmisji płytki $T = N_2/N_1$.

czas zliczania t (μs)	N_1	N_2	T
1000	110,712	24,316	0,220
100	11,093	2,463	0,222
50	5,500	1,219	0,222
10	1,103	0,251	0,228

Tabela 1 N_i – średnia liczba zliczeń: 1 – bez, 2 – z płytką światłodzielącą; T – transmisja płytki.

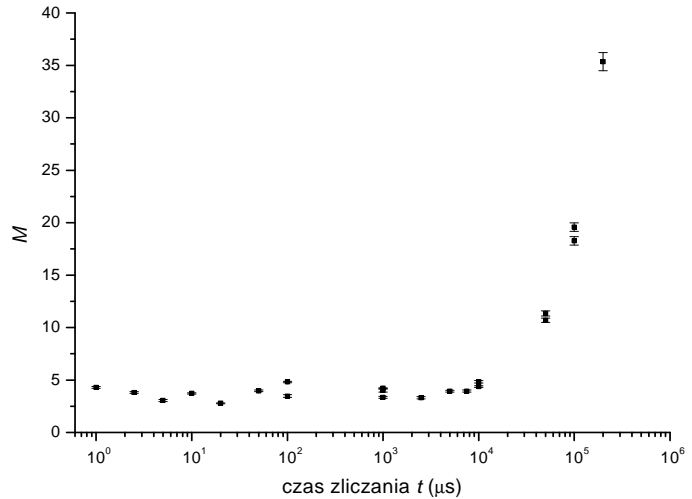


Rys. 3 Histogramy dla światła laserowego po przejściu przez płytkę światłodzielną.

Otrzymujemy średnią wartość $T = 0,223 \pm 0,004$. Rozbieżności pomiędzy otrzymanymi wartościami T pojawiają się na 3. miejscu znaczącym, różnica pomiędzy wartością maksymalną i minimalną wynosi 3,6%. Najprawdopodobniej przyczyną rozbieżności są niestabilności pracy lasera – natężenia lasera zmieniało się w niewielkim stopniu z upływem czasu.

Drugą częścią ćwiczenia było wyznaczenie statystyk zliczeń fotonów dla światła termicznego. Starłem się uzyskać statystykę zliczeń opisaną rozkładem Bosego-Einsteina – do tego celu potrzebne było światło termiczne o możliwie długim czasie koherencji. Obracając matówkę (por. zmodyfikowany układ doświadczalny, rys. 1b) z bardzo niewielką prędkością udawało się uzyskać czas koherencji nie mniejszy niż 6 ms (sposób pomiaru czasu koherencji omówiony zostanie w następnym akapicie). Można by się w takim razie spodziewać, że dla czasów zliczania rzędu mikrosekund statystyka zliczeń fotonów będzie opisywana rozkładem Bosego-Einsteina. Niestety okazało się, że uzyskiwane światło termiczne nawet dla krótkiego czasu zliczania jest w pewnym stopniu niespójne czasowo lub przestrzennie (minimalna możliwa do osiągnięcia ilość stopni swobody M wynosiła ok. 3). Zredukowanie tej niespójności (dalsze odsunięcie detektora od matówki i silniejsze zogniskowanie wiązki na matówce) było trudne technicznie. Z tego powodu zmierzone statystyki są opisywane rozkładem ujemnym dwumianowym. Jednakże, ponieważ rozkład Bosego-Einsteina jest szczególnym przypadkiem rozkładu ujemnego dwumianowego, wykazanie, że rozkład ten w przypadku ogólnym (dla różnych M) nie zmienia się po przejściu światła przez płytkę, implikuje, że szczególny przypadek tego rozkładu – rozkład Bosego-Einsteina – po przejściu przez płytkę też pozostanie niezmienny.

Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów zmierzylem czas koherencji uzyskiwanego przeze mnie światła termicznego. W tej części eksperymentu płytka światłodziela była usunięta z drogi światła. Zmierzylem statystyki zliczeń fotonów dla szerokiego zakresu czasów zliczania. Na podstawie uzyskanych histogramów obliczałem rozkłady prawdopodobieństwa i dopasowywałem do nich rozkład ujemny dwumianowy (2). Na wykresie (rys. 4) przedstawiona jest zależność liczby stopni swobody M od czasu zliczania t . Jak widać, w szerokim za-



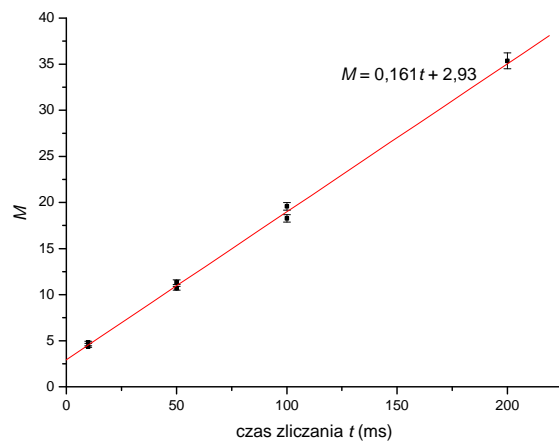
Rys. 4 Wykres zależności liczby stopni swobody M od czasu zliczania t .

kresie czasów (1 μs – 10 ms) M nie zależy od czasu zliczania, wykazuje jedynie przypadkowe fluktuacje w zakresie 2,8 – 4,8. Zależność $t(M)$ pojawia się dopiero dla czasów t dłuższych od 10 ms. Zależność ta jest liniowa, co przedstawione zostało, wraz z dopasowaną prostą, na rys. 5. Na podstawie równania prostej można wyznaczyć czas koherencji światła. Zgodnie z [1], rozdz. 6 i 9, dla czasów zliczania dużo dłuższych od czasu koherencji τ_c zachodzi związek: $M = \frac{t}{\tau_c}$. W przypadku braku spójności przestrzennej zależność ta modyfikuje się do $M = M_s \frac{1}{\tau_c} t$, gdzie M_s jest liczbą przestrzennych stopni swobody. Okazuje się jednak, że zmierzona przeze mnie zależność $M(t)$ ma inną postać: jest liniowa, ale nie wprost proporcjonalna:

$$M = M_s \frac{1}{\tau_c} t + M_0 \quad (4)$$

Zakładając pełną koherencję przestrzenną ($M_s = 1$) można obliczyć ograniczenie dolne na czas koherencji, jako odwrotność współczynnika kierunkowego dopasowanej prostej: $\tau_c = 6,23 \pm 0,09$ ms. Jeśli w rzeczywistości światło jest niespójne przestrzennie ($M_s > 1$), czas koherencji jest dłuższy. W przypadku tego eksperymentu istotny jest fakt, że dostępne są czasy zliczania krótsze od czasu koherencji, więc wystarczająca jest znajomość ograniczenia dolnego na τ_c .

Komentarza wymaga jeszcze obecność w zależności $M(t)$ członu M_0 . O ten niezależny od czasu zliczania człon powiększone są wartości M dla wszystkich pomiarów. Członu takiego nie przewidują obliczenia w [1]. Niezależność tego członu od czasu sugeruje, że pochodzi on od promieniowania o bardzo długim czasie koherencji – a więc od promieniowania laserowego. Wydaje się prawdopodobne, że to właśnie wartość tego członu fluktuuje w czasie – tłumaczy to rozrzut wartości M dla $1 \mu\text{s} < t < 10$ ms oraz różnice wartości M (rzędu $\pm 1,06$, jako błąd przyjmuję dwa odchylenia standardowe wartości M dla

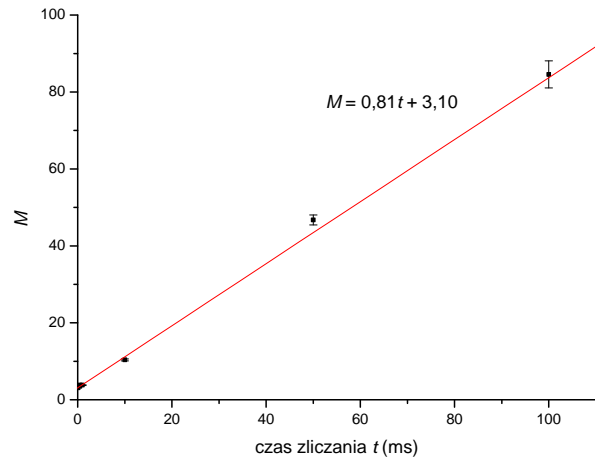


Rys. 5 Wykres zależności $M(t)$ dla wolno obracającej się matówki.

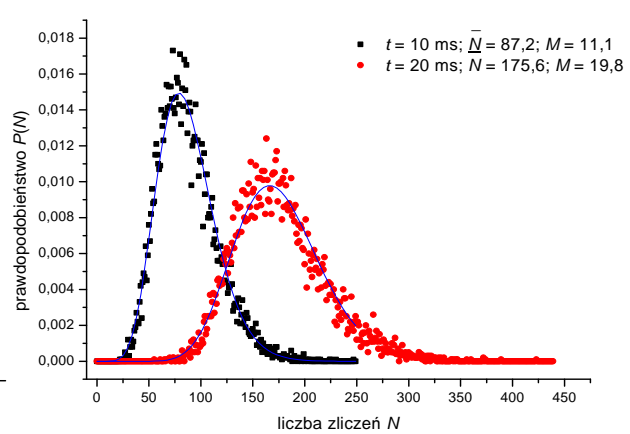
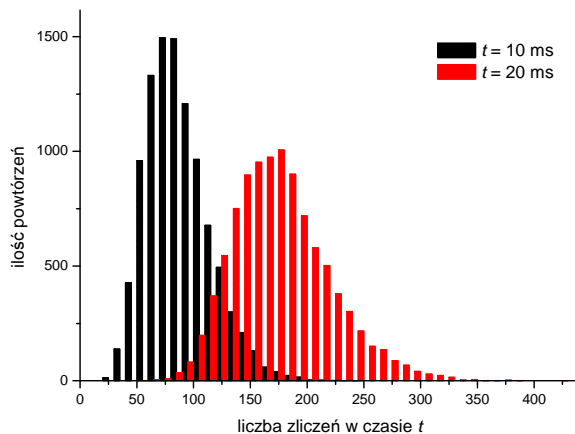
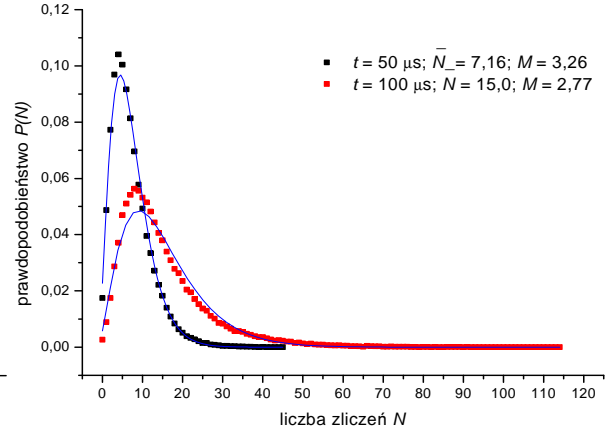
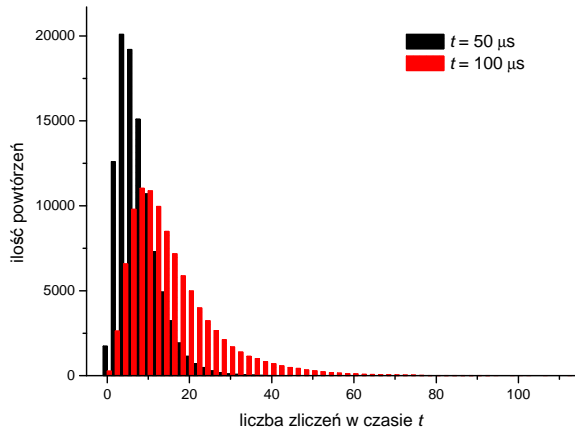
$1 \mu\text{s} < t < 10 \text{ ms}$) w przypadku powtórzeń pomiarów dla czasów $t > 10 \text{ ms}$. Tak silne fluktuacje wskazują, że ich źródłem może być obracająca się matówka, która nie jest zupełnie jednorodna. Podejrzewam więc, że człon M_0 pojawia się w wyniku przedostawania się przez matówkę pewnej ilości „nieutermicznionego” światła laserowego. W praktyce obecność tego członu powoduje, że, nawet dla czasów zliczania znacznie krótszych od τ_c , $M > 1$.

Aby sprawdzić poprawność wyznaczania czasu koherencji wykonałem analogiczną serię pomiarów dla szybciej obracającej się matówki. Oczekiwałem zmniejszenia się czasu koherencji. Wyniki pomiarów przedstawione są na rys. 6. Zależność $M(t)$ jest liniowa dla czasów $t > 1 \text{ ms}$. Czas koherencji wynosi $\tau_c = 1,24 \pm 0,03$ i zgodnie z oczekiwaniami jest krótszy od czasu dla wolno obracającej się matówki.

Znając parametry dostępnego światła termicznego mogłem przystąpić do właściwej części pomiarów. Wykonałem pomiary statystyk zliczeń fotonów dla 4 różnych czasów zliczania. Odpowiednie histogramy zamieszczone są na rys. 7. Obok histogramów znajdują się wyliczone na ich podstawie rozkłady prawdopodobieństwa i dopasowane do nich krzywe odpowiadające rozkładowi ujemnemu dwumianowemu (2).



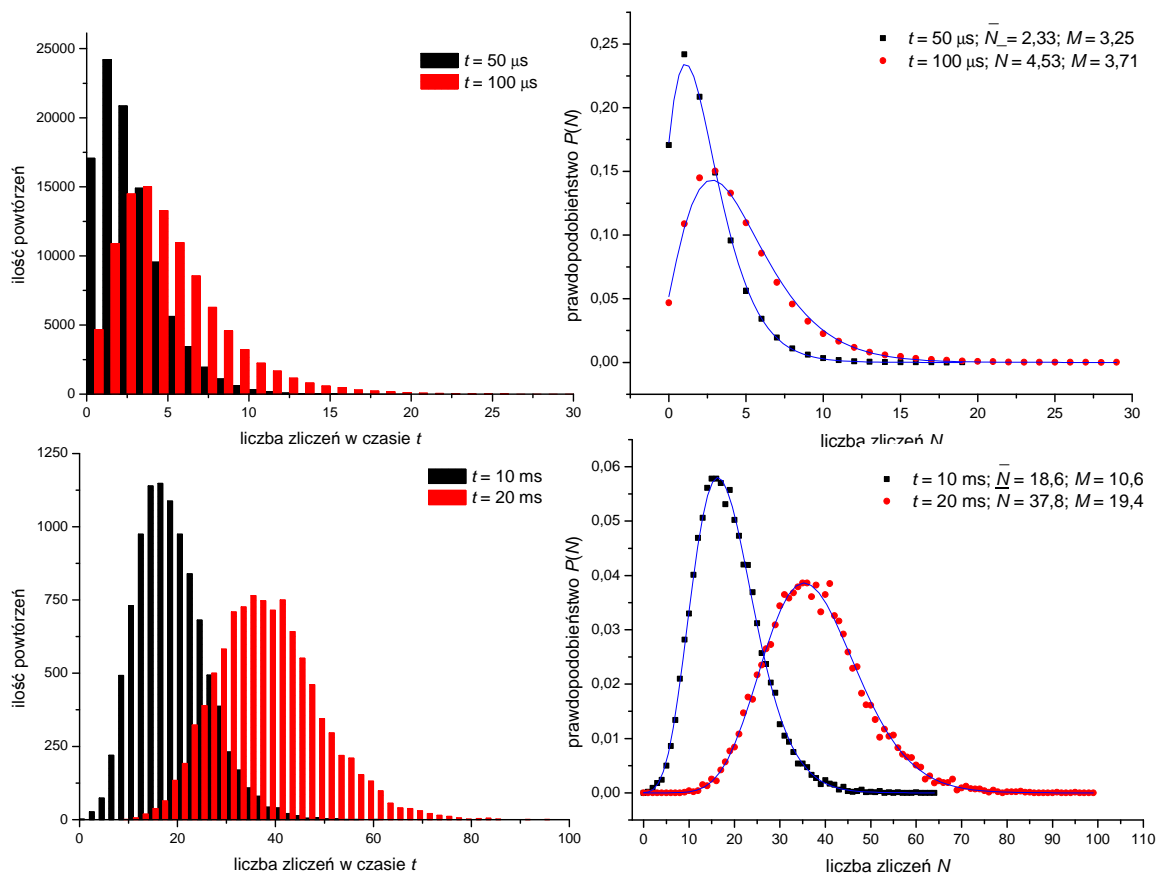
Rys. 6 Wykres zależności $M(t)$ dla szybko obracającej się matówki.



Rys. 7 Histogramy zliczeń fotonów dla światła termicznego i dopasowane krzywe (rozkład ujemny dwumianowy).

Dopasowanie jest dobre ($R^2 > 0,975$), ale nie tak dobre jak dla światła laserowego. Przyczyną tego (oprócz wymienianych już wcześniej powodów) są następujące fakty: a) rozkład ujemny dwumianowy tylko w przybliżeniu opisuje statystykę światła termicznego ([1], rozdz. 6); b) ze względu na czas trwania pomiarów dla $t = 10$ ms i 20 ms wykonano tylko 10000 powtórzeń; c) dla pomiarów z $t = 10$ ms i 20 ms konieczne było odejmowanie od wyników uśrednionej wartości tła (ciemnych zliczeń).

Następnie na drodze światła do detektora umieściłem płytkę światłodziącą i nie zmieniając natężenia światła wykonałem pomiary statystyk zliczeń dla tych samych czasów zliczania. Wyniki przedstawiłem na rys. 8.



Rys. 8 Histogramy dla światła termicznego po przejściu przez płytkę światłodziącą i dopasowane krzywe (rozkład ujemny dwumianowy).

t	M_1	M_2
50 μ s	3,26	3,25
100 μ s	2,77	3,71
10 ms	11,1	10,6
20 ms	19,8	19,4

Tabela 2 t – czas zliczania; M_i – liczba stopni swobody: 1 – bez, 2 – z płytką światłodziącą

Różnice te są najprawdopodobniej spowodowane omawianymi wcześniej fluktuacjami M (których rozrzut wynosi $\pm 1,06$).

Również po przejściu światła przez płytkę światłodziącą obserwujemy statystyki opisywane rozkładem ujemnym dwumianowym. W tabeli 2 zamieszczone zostało porównanie parametrów M odpowiednich par rozkładów.

Wartości M dla pomiarów z i bez płytki światłodziącej są sobie bliskie, chociaż w większości przypadków różne (w granicach ± 1).

Podsumowanie

W wyniku pomiarów potwierdzone zostały przewidywania teoretyczne – zarówno statystyka zliczeń fotonów światła lasera jednomodowego, jak i światła termicznego pozostaje nie zmieniona (za wyjątkiem wartości średniej) po przejściu światła przez płytkę światłodziącą. W przypadku światła termicznego pokazane zostało, że, w granicach błędu doświadczalnego, nie zmieniona pozostaje również liczba stopni swobody M . Wyznaczona została także zależność liczby stopni swobody M światła termicznego od czasu zliczania t i na jej podstawie obliczony czas koherencji τ_c (dokładniej: ograniczenie dolne na czas koherencji). Zależność $M(t)$, zgodnie z przewidywaniami [1], jest liniowa. Nie jest jednak wprost proporcjonalna – pojawia się fluktuujący w czasie składnik (o niezależnej od t wartości średniej), powodujący fluktuacje wartości M . Podejrzewam, jak już uzasadniałem wcześniej, że jego obecność jest spowodowana przez niepełne rozpraszanie światła laserowego na matówce.

Literatura:

- [1] J. W. Goodman, *Optyka statystyczna*, PWN, Warszawa 1993;
- [2] W. Vogel et al., *Quantum optics: an introduction*, Wiley-VCH, Berlin 2001;
- [3] R. J. Nowak, *Statystyka matematyczna*, Wydział Fizyki UW 1999.

1) Światło lasera jednomodowego

Światło lasera jednomodowego kwantowo-mechanicznie opisywane jest przez tzw. stan koherentny, będący kombinacją liniową stanów jednofotonowych ze współczynnikami równymi odpowiednim prawdopodobieństwom z rozkładu Poissona [2]:

$$|\bar{N}\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} |N\rangle \quad (\text{A.1})$$

gdzie: $|\bar{N}\rangle$ – stan koherentny o średniej liczbie fotonów \bar{N} ; $|N\rangle$ – stan N -fotonowy.

Bez problemu jesteśmy w stanie opisać działanie płytki światłodziеляjącej o współczynniku transmisji T na stan N -fotonowy: prawdopodobieństwo przejścia przez płytkę K fotonów jest dane rozkładem dwumianowym. A więc stan $|N\rangle$ po przejściu przez płytkę zmieni się w stan:

$$|N'\rangle = \sum_{K=0}^N \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle \quad (\text{A.2})$$

Znając działanie płytki na stan jednofotonowy oraz rozkład stanu koherentnego na stany jednofotonowe możemy wypisać postać stanu koherentnego po przejściu przez płytkę:

$$|\bar{N}'\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{K=0}^N \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle \quad (\text{A.3})$$

Aby wyznaczyć statystykę tego stanu, należy wyrazić go jako liniową kombinację stanów jednofotonowych:

$$|\bar{N}'\rangle = \sum_{K=0}^{\infty} a_K |K\rangle \quad (\text{A.4})$$

W celu wyznaczenia postaci współczynników kombinacji liniowej należy zamienić w (A.3) kolejność sumowania. Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} a_K &= \sum_{N=K}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} = \\ &= \frac{e^{-\bar{N}}}{K!} T^K \sum_{N=K}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} \frac{N!}{(N-K)!} (1-T)^{N-K} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dokonyjemy przeindeksowania $N \rightarrow N + K$:

$$\begin{aligned} a_K &= \frac{e^{-\bar{N}}}{K!} T^K \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{N}^{N+K}}{N!} (1-T)^N = \frac{e^{-\bar{N}}}{K!} (T\bar{N})^K \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[\bar{N}(1-T)]^N}{N!} = \\ &= \frac{e^{-\bar{N}}}{K!} (T\bar{N})^K \cdot e^{\bar{N}(1-T)} = \frac{e^{-T\bar{N}}}{K!} (T\bar{N})^K \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

(Skorzystaliśmy z rozwinięcia funkcji e^x w szereg Taylora.)

A więc stan światła po przejściu przez płytkę światłodzielałą możemy zapisać jako:

$$|\bar{N}'\rangle = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(T\bar{N})^K}{K!} e^{-T\bar{N}} |K\rangle \quad (\text{A.7})$$

Porównując to wyrażenie z (A.1) zauważamy, że jest to również stan o statystyce poissonowskiej o wartości średniej pomnożonej przez współczynnik transmisji płytki.

2) Światło termiczne

Analogicznie jak dla światła laserowego, stan światła termicznego (o M stopniach swobody) można zapisać jako kombinację liniową stanów jednofotonowych; tym razem

współczynnikami kombinacji będą prawdopodobieństwa z rozkładu ujemnego dwumianowego (2):

$$|\bar{N}\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} |N\rangle \quad (\text{A.8})$$

Podobnie jak dla światła laserowego, stan światła termicznego po przejściu przez płytkę światłodziącą o transmisji T możemy zapisać jako:

$$|\bar{N}'\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{K=0}^N \frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle \quad (\text{A.9})$$

Podobnie jak poprzednio, aby doprowadzić to wyrażenie do postaci kombinacji liniowej stanów jednofotonowych: $|\bar{N}'\rangle = \sum_{K=0}^{\infty} a_K |K\rangle$ zamieniamy kolejność sumowania i otrzymujemy wyrażenie na a_K :

$$a_K = \sum_{N=K}^{\infty} \frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} \quad (\text{A.10})$$

Aby ułatwić późniejsze przekształcenia warto skorzystać z równości (por. [1], rozdz. 9):

$$\frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W)^N}{N! \Gamma(M)} e^{-\alpha W} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} dW \quad (\text{A.11})$$

gdzie: $\alpha \bar{W} = \bar{N}$; α – parametr. Po podstawieniu do (A.10) i zamianie kolejności sumowania i całkowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_K &= \int_0^{\infty} \sum_{N=K}^{\infty} \frac{(\alpha W)^N}{N! \Gamma(M)} e^{-\alpha W} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} \frac{N!}{(N-K)!K!} T^K (1-T)^{N-K} dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha W}}{\Gamma(M)K!} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} T^K (\alpha W)^K \sum_{N=K}^{\infty} \frac{(\alpha W)^{N-K} (1-T)^{N-K}}{(N-K)!} dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha W}}{\Gamma(M)K!} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} (T\alpha W)^K \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[\alpha W(1-T)]^N}{N!} dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha W}}{\Gamma(M)K!} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} (T\alpha W)^K e^{\alpha W(1-T)} dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(T\alpha W)^K}{\Gamma(M)K!} e^{-T\alpha W} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M W^{M-1} e^{-M \frac{W}{\bar{W}}} dW = \left. \begin{array}{l} \text{zamiana zmiennych:} \\ W' = TW \\ dW = \frac{dW'}{T} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W')^K}{\Gamma(M)K!} e^{-\alpha W'} \left(\frac{M}{\bar{W}}\right)^M \frac{W'^{M-1}}{T^{M-1}} e^{-M \frac{W'}{T\bar{W}}} \frac{1}{T} dW' = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W')^K}{K! \Gamma(M)} e^{-\alpha W'} \left(\frac{M}{T\bar{W}}\right)^M W'^{M-1} e^{-M \frac{W'}{T\bar{W}}} dW' \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Korzystając znów z (A.11) otrzymujemy:

$$a_K = \frac{\Gamma(K+M)}{\Gamma(K+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{T\bar{N}}\right)^{-K} \left(1 + \frac{T\bar{N}}{M}\right)^{-M} \quad (\text{A.13})$$

A więc statystyka promieniowania termicznego po przejściu przez płytkę światłodziącą jest nadal określona rozkładem ujemnym dwumianowym o niezmięnionej liczbie stopni swobody M i średniej liczbie fotonów równej $T\bar{N}$:

$$|\bar{N}\rangle = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\Gamma(K+M)}{\Gamma(K+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{T\bar{N}}\right)^{-K} \left(1 + \frac{T\bar{N}}{M}\right)^{-M} |K\rangle \quad (\text{A.14})$$

3) Redukcja rozkładu ujemnego dwumianowego do rozkładu Bosego-Einsteina

Rozkład prawdopodobieństwa dla rozkładu ujemnego dwumianowego dany jest przez:

$$P(N) = \frac{\Gamma(N+M)}{\Gamma(N+1)\Gamma(M)} \left(1 + \frac{M}{\bar{N}}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\bar{N}}{M}\right)^{-M} \quad (\text{A.15})$$

Dla $M \rightarrow 1$:

$$P(N) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{\bar{N}}\right)^{-N} \frac{1}{1 + \bar{N}} = \frac{1}{1 + \bar{N}} \left(\frac{\bar{N}}{\bar{N} + 1}\right)^N \quad (\text{A.16})$$

otrzymujemy rozkład Bosego-Einsteina (3).

ZAŁĄCZNIK B

Spróbujmy teraz zbadać, w ogólnym przypadku, jaka powinna być statystyka natężenia światła, by płytka światłodzieląca nie powodowała jej zmiany.

Założmy, że rozkład prawdopodobieństwa dla natężenia całkowego W dany jest funkcją $\rho(W; \bar{W})$ (dla $W \geq 0$, dla $W < 0$ prawdopodobieństwo jest oczywiście zerowe), gdzie parametr \bar{W} jest średnią wartością natężenia całkowego:

$$\bar{W} = \int_0^{\infty} W \rho(W; \bar{W}) dW \quad (\text{B.1})$$

(Wartość \bar{W} jest wprost proporcjonalna do średniej liczby fotonów \bar{N} : $\bar{N} = \alpha \bar{W}$)

Znając $\rho(W; \bar{W})$ możemy (zgodnie z [1], rozdz. 9) zapisać współczynniki rozwinięcia stanu światła na stany jednofotonowe:

$$|\bar{N}\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} a_N |N\rangle; \quad a_N = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W)^N}{N!} e^{-\alpha W} \rho(W; \bar{W}) dW \quad (\text{B.2})$$

Podobnie jak poprzednio, zapiszmy działanie płytki światłodzielącej o transmisji T na jednofotonowy stan światła $|N\rangle$ [por. równ. (A.2)]:

$$|N'\rangle = \sum_{K=0}^N \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle \quad (\text{B.3})$$

gdzie $|N'\rangle$ oznacza stan jednofotonowy po przejściu przez płytkę. A zatem płytka światłodzieląca przekształci stan wielofotonowy $|\bar{N}\rangle$ w stan:

$$\begin{aligned} |\bar{N}'\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{K=0}^N a_N \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle = \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{N=K}^{\infty} a_N \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} |K\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dążymy do wyznaczenia współczynników a_K' rozwinięcia stanu $|\bar{N}'\rangle$ na stany jednofotonowe:

$$|\bar{N}'\rangle = \sum_{K=0}^{\infty} a_K' |K\rangle \quad (\text{B.5})$$

Porównując (B.5) z (B.4) możemy wyrazić współczynniki a_K' przez a_N :

$$\begin{aligned} a_K' &= \sum_{N=K}^{\infty} a_N \binom{N}{K} T^K (1-T)^{N-K} = \\ &= \sum_{N=K}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W)^N}{N!} e^{-\alpha W} \rho(W; \bar{W}) \frac{N!}{(N-K)!K!} T^K (1-T)^{N-K} dW \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dokonajmy teraz przeindeksowania ($N \rightarrow N - K$) oraz zamiany kolejności całkowania i sumowania, a następnie wyeliminujmy z wyrażenia (B.6) sumę po N :

$$\begin{aligned} a_K' &= \int_0^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} (\alpha W)^{N+K} e^{-\alpha W} \rho(W; \bar{W}) \frac{1}{N!K!} T^K (1-T)^N dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(T\alpha W)^K}{K!} \rho(W; \bar{W}) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[\alpha W(1-T)]^N}{N!} dW = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(T\alpha W)^K}{K!} e^{-\alpha W} \rho(W; \bar{W}) e^{\alpha W(1-T)} dW = \int_0^{\infty} \frac{(T\alpha W)^K}{K!} e^{-T\alpha W} \rho(W; \bar{W}) dW \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Wprowadźmy oznaczenie: $W' = TW$, i dokonajmy zamiany zmiennych:

$$a_K' = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W')^K}{K!} e^{-\alpha W'} \rho(W; \bar{W}) \frac{dW'}{T} = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W')^K}{K!} e^{-\alpha W'} \left[\frac{1}{T} \rho(W; \bar{W}) \right] dW' \quad (\text{B.8})$$

Aby statystyka światła pozostawała niezmienną po przejściu przez płytkę światłodziącą wyrażenie określające a_K' musi mieć taką samą postać jak wyrażenie (8.2), określające a_K :

$$a_K' = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha W')^K}{K!} e^{-\alpha W'} \rho(W'; \bar{W}') dW' \quad (\text{B.9})$$

Porównanie wyrażeń (B.8) i (B.9) daje warunek (konieczny i dostateczny), aby światło o statystyce opisanej rozkładem ρ nie zmieniało tej statystyki po przejściu przez płytkę światłodziącą:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \rho(W; \bar{W}) &= \rho(W'; \bar{W}') \\ \rho(W; \bar{W}) &= T \rho(TW; T\bar{W}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Aby sprawdzić, jakie rozkłady ρ spełniają warunek B.10 dokonam zamiany zmiennych, od których zależy ρ , z W na TW (skorzystam w tym celu ze wzoru na zamianę zmiennych w rozkładach prawdopodobieństwa, por. [3]):

$$\rho(W'; \bar{W}') = \rho(W; \bar{W}) \left| \frac{dW}{dW'} \right| = \rho(W; \bar{W}) \frac{1}{T} \quad (\text{B.11})$$

A więc $\rho(W; \bar{W}) = T \rho(W'; \bar{W}') = T \rho(TW; T\bar{W})$! Sprawdźmy jeszcze jaka jest średnia rozkładu $\rho(W')$:

$$\begin{aligned} \bar{W}' &= \int_0^{\infty} W' \rho(W'; \bar{W}') dW' = \int_0^{\infty} TW \frac{1}{T} \rho(W; \bar{W}) dW = \left| \frac{W'=TW}{dW'=TdW} \right| = \\ &= T \int_0^{\infty} W \rho(W; \bar{W}) dW = T\bar{W} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Wynik (B.11) i (B.12) oznacza, że ρ spełnia (B.10):

$$\rho(W'; \bar{W}') = \frac{1}{T} \rho(W, \bar{W})$$

Ponieważ na temat rozkładu ρ nie zostały poczynione żadne założenia (ponad to, że ρ jest rozkładem prawdopodobieństwa), (B.10) jest spełnione dla dowolnego ρ . A zatem dla dowolnego stanu światła, *dającego zapisać się jako superpozycja stanów jednofofotowych*, przejście światła przez płytkę światłodziącą nie spowoduje zmiany statystyki tego stanu.